

## 802 概率论与数理统计

(共九题, 满分 150 分)

一、(15 分) 将  $A, B, C$  三个字母之一输入信道, 输出为原字母的概率为  $\alpha$ , 而输出为其他一字母的概率都是  $\frac{1-\alpha}{2}$ 。今将字母串  $AAAA, BBBB, CCCC$  之一输入信道, 输入  $AAAA, BBBB, CCCC$  的概率分别为  $p_1, p_2, p_3 (p_1 + p_2 + p_3 = 1)$ , 已知输出为  $ABCA$ , 问输入的是  $AAAA$  的概率是多少? (设信道传输各个字母的工作是相互独立的)

二、(13 分)  $n$  个人独立地破译同一份密码, 若每个人能破译出的概率都是 0.7, 现要以 99.99% 的把握将密码破译, 问  $n$  至少等于多少?

三、(20 分) 设随机变量  $U$  和  $V$  都仅取 1 和 -1 两个值, 并且

$$P\{U=1\} = \frac{1}{2}, \quad P\{V=1|U=1\} = \frac{1}{3} = P\{V=-1|U=-1\}$$

(1) 求  $U$  和  $V$  的联合分布律。

(2) 求  $x$  的方程  $x^2 + (U+V)x + U+V = 0$  至少有一个实根的概率。

四、(16 分) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且都服从  $[0,1]$  上的均匀分布, 试求  $Y_1 = \min(X, Y)$  与  $Y_2 = \max(X, Y)$  的联合概率密度函数。

五、(16 分) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 并且  $P\{X=1\} = P\{Y=1\} = p$ ,  $P\{X=0\} = P\{Y=0\} = 1-p = q$ ,  $0 < p < 1$ , 定义随机变量  $Z$  为

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{若 } X+Y \text{ 为偶数} \\ 0 & \text{若 } X+Y \text{ 为奇数} \end{cases}$$

问当  $p$  取何值时,  $X$  与  $Z$  相互独立?

六、(16分) 已知二维随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  上的均匀分布, 试求  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ 。

七、(20分) 设随机变量  $X$  在  $[-0.5, 0.5]$  上服从均匀分布,  $g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ ,

(1) 求  $g(X)$  的分布函数。

(2) 求  $E[g(X)]$  和  $D[g(X)]$ 。

八、(18分) 设随机变量  $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 求  $E(\max(X, Y))$  和  $D(\max(X, Y))$ 。

九、(16分) 将  $n$  个带有号码 1 至  $n$  的球投入  $n$  个编有号码 1 至  $n$  的匣子, 并限制每一个匣子只能进一个球, 设球与匣子号码一致的个数是  $S_n$ , 试证明:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0 \quad (n \rightarrow \infty)。$$