801 高等代数

（共十三题，满分 150 分）

一、（10 分）计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}。$$

二、（10 分）λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=-2 \\ x_1-2x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2 \end{cases}$ 有解？并求出它的解。

三、（10 分）已知向量组

$$A:a_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{和} B:b_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$

证明：向量组 A 与向量组 B 等价。

四、（10 分）设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 4，2，2，特征值 4 对应的特征向量为 $p=(1,1,1)^T$，求矩阵 A。

五、（10 分）解矩阵方程 $\begin{pmatrix}1 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$。

六、（15 分）用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$$

为标准形，并求出所用的正交变换。

七、（15 分）在三维空间 R^3 中， T 是 R^3 的线性变换，且

$$T(\eta_1)=\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix},T(\eta_2)=\begin{pmatrix}0\\-1\\6\end{pmatrix},T(\eta_3)=\begin{pmatrix}-5\\-1\\9\end{pmatrix},$$

其中 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ 是 R^3 的一组基，求 T 在基 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$

$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵。

八、（15 分）设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化，并把 a_1,a_2,a_3 用规范正交基线性表示。

九、（10 分）证明：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 唯一的线性表示。

十、（10 分）已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 和 $\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，分别生成 R^3 中的两个子空间，记为 $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$， $W_2=L(\beta_1,\beta_2)$，求 W_1+W_2 及 $W_1\cap W_2$ 的基和维数。

十一、（10 分）设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，证明

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & 当R(A)=n, \\ 1, & 当R(A)=n-1, \\ 0, & 当R(A)\leq n-2. \end{cases}$$

其中 $R(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

十二、（10 分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A 的 k 阶顺序主子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, 1\leq k\leq n,$$

则有下三角矩阵 $B_{n\times n}$，使 $BA=R$（R 为上三角矩阵）。

十三、（15 分）已知

$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,\quad g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$，求 $(f(x),g(x))$ 以及 $u(x)$、$v(x)$，使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$。