611 数学分析

（共八题，满分 150 分）

一（40 分，每小题 10 分）．计算

（a）二重积分 $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$；

（b）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 其中 $u=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$，且 $f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数；

（c）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛半径和收敛区间；

（d）积分 $\oint\limits_L (x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy$, 其中 L 为直线 $y=0, x+2y=2$ 以及圆弧 $x^2+y^2=1$所围的区域的边界， 沿逆时针方向.

二(15 分)．设 $\{a_n\}$ 是实数列, a 是实数． 证明: $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充分必要条件是: $\{a_n\}$ 的任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 都有子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 收敛于 a .

三(15 分)．设 $\delta>0$, 函数 f 和 g 定义于 $(-\delta,\delta)$ 且

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

假如 $g(0)=g'(0)=0$, 而 $g''(0)=17$， 证明 f 在 $x=0$ 可导并求 $f'(0)$.

四(15 分)．设 n 是偶数， $a_0,a_1,\dots,a_n$ 是实数， $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$，

证明：存在 $x_0 \in (-\infty,+\infty)$，使得对于任意 $x \in (-\infty,+\infty)$, 有 $f(x_0) \le f(x)$.

五(15 分). 设 $a>0$, 证明：

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx$$

关于 y 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

六(15 分). 设 $\{a_n\}$ 是非负单减实数列， 级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛，证明：$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

七(15 分) 设 $a \in (-\infty,+\infty)$，f 是实值函数且分别在 $(-\infty,a]$ 上以及 $[a,+\infty)$ 上一致连续. 证明：f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

八(20 分) 利用确界存在定理证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)>0, f(b)<0$，则必有 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c)=0$.