

601 数学分析

(共八题, 满分 150 分)

一 (40 分, 每小题 10 分). 计算

(a) 二重积分 $\iint_{\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$;

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 其中 $u = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$, 且 $f(x, y)$ 有连续的二阶偏导数;

(c) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ 的收敛半径和收敛区间;

(d) 积分 $\oint_L (x^2 - 2y) dx + (3x + ye^y) dy$, 其中 L 为直线 $y=0, x+2y=2$ 以及圆弧 $x^2 + y^2 = 1$ 所围的区域的边界, 沿逆时针方向.

二(15 分). 设 $\{a_n\}$ 是实数列, a 是实数. 证明: $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充分必要条件是: $\{a_n\}$ 的任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 都有子列 $\{a_{n_{k_j}}\}$ 收敛于 a .

三(15 分). 设 $\delta > 0$, 函数 f 和 g 定义于 $(-\delta, \delta)$ 且

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

假如 $g(0) = g'(0) = 0$, 而 $g''(0) = 17$, 证明 f 在 $x=0$ 可导并求 $f'(0)$.

四(15 分). 设 n 是偶数, a_0, a_1, \dots, a_n 是实数, $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$,

证明：存在 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ ，使得对于任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ ，有 $f(x_0) \leq f(x)$ 。

五(15分)．设 $a > 0$ ，证明：

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + y^2} dx$$

关于 y 在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛。

六(15分)．设 $\{a_n\}$ 是非负单减实数列，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ 。

七(15分) 设 $a \in (-\infty, +\infty)$ ， f 是实值函数且分别在 $(-\infty, a]$ 上以及 $[a, +\infty)$ 上一致连续。证明： f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续。

八(20分) 利用确界存在定理证明：若 f 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a) > 0, f(b) < 0$ ，则必有 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = 0$ 。